федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

Оборонно-техническая олимпиада (II этап)

для 8 класса

Направление: Математика

Вариант: 1

1	Решите уравнение $$(x^2-2x+3)^2-5(x^2-2x+2)+1=0$$
2	Решите уравнение $$\lvert 2x-y-3\rvert+\lvert x+5y-7\rvert=0$$
3	Решите систему уравнений $$\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5 \end{cases}$$
4	К задуманному двузначному числу, оканчивающемуся нулем, приписали справа это же число. Из нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа. В частном получилась половина задуманного числа, а в остатке задуманное число. Какое число задумано?
5	В фигуру, ограниченную параболой $y=-x^2+10x-11$ и осью Ox, поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две другие – на оси Ox. Найдите наибольший из периметров, который может иметь такой прямоугольник.
6	Сколькими способами число 2021 можно представить в виде разности двух квадратов натуральных чисел?

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.

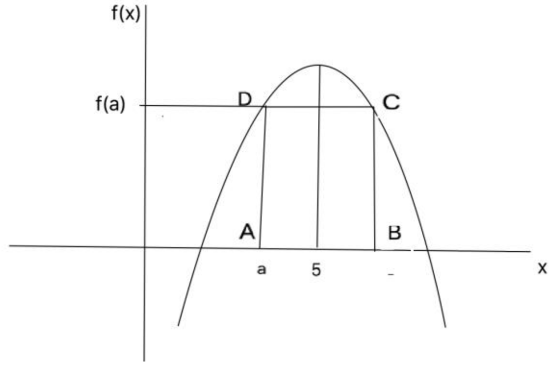
Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение

8 класс, 1 вариант

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Решение:</td><td>$$(x^2-2x+3)^2-5(x^2-2x+2)+1=0$$ Обозначим $x^2-2x+2=t$, тогда уравнение $(t+1)^2-5t+1=0$ имеет корни $t_1=1,\ \ t_2=2$.
Подставив найденные значения t, получим два уравнения
$x^2-2x+2=1$ и $x^2-2x+2=2$, корни которых 1, 0 и 2.</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>$\{\mathbf{0};\ \mathbf{1};\ \mathbf{2}\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Решение:</td><td>$$|2x-y-3|+|x+5y-7|=0$$ Сумма двух модулей может равняться нулю только, если они равны нуль, т.е. получаем систему двух уравнений $\begin{cases}2x-y=3,\\ x+5y=7.\end{cases}$
Решением этой системы будет $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>$\{(\mathbf{2};\ \mathbf{1})\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Решение:</td><td>$$\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5.\end{cases}$$ Во втором уравнении системы сделаем подстановку $\sqrt{\frac{x}{y}}=t,\ \ t\geq 0$.
Тогда это уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, которое имеет корни $t_1=\frac{1}{2},\ \ t_2=2$.
Следовательно, получим две системы:
1) $\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=8.\end{cases}$
2) $\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{\frac{x}{y}}=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>$\{(\mathbf{2};\ \mathbf{8});\ (\mathbf{8};\ \mathbf{2})\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Решение:</td><td>Пусть x – искомое двузначное число. Если к нему приписать справа это же число, то получим число $100x+x=101x$. Составляем уравнение: $$\frac{101x-x^2}{0{,}04x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{0{,}04x^2}$$ корнями которого являются числа $x_1=50,\ x_2=-100$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи.</td></tr>
<tr><td>Ответ:</td><td>50</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>5</td>
<td>Решение:

Ответ:</td>
<td>В системе координат Oxy изобразим параболу $y = f(x)$ с вершиной в точке $x_0 = 5$ и впишем в нее прямоугольник ABCD:


Длина стороны AB= $2(5 - a)$, а сторона AD= $f(a) = -a^2 + 10a - 11$.
Тогда периметр прямоугольника будет равен:
$P(a) = 4(5 - a) + 2f(a) = 2(-a^2 + 8a - 1)$.
Квадратичная функция $P(a)$ принимает наибольшее значение в вершине параболы, т.е. в точке $a_0 = \frac{-8}{-2} = 4$.
Следовательно, наибольший периметр прямоугольника равен $P(4) = 30$.
30</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Решение:

Ответ:</td>
<td>Число 2021 раскладывается на простые сомножители $1 \cdot 43 \cdot 47$.
Значит, число 2021 можно представить двумя способами в виде произведения двух чисел:
$$2021 = 43 \cdot 47 \text{ или } 2021 = 1 \cdot 2021.$$
По условию, это произведение равно разности двух квадратов натуральных чисел, которые обозначим через x и y, т.е.:
$$2021 = 43 \cdot 47 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
или
$$2021 = 1 \cdot 2021 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$
Числа x и y натуральные, тогда последние равенства возможны в 2 случаях:
$$1) \quad \begin{cases} x - y = 43, \\ x + y = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45, \\ y = 2. \end{cases}$$
$$2) \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2021 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1011, \\ y = 1010. \end{cases}$$
2 способа: ($\mathbf{45^2 - 2^2}$; $\mathbf{1011^2 - 1010^2}$)</td>
</tr>
</table>

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом
8 класс

Задание	Критерий	Баллы
1	Приведено полное правильное решение.	10
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка, но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений или дополнений.	4-6
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-3
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*10*

2	Обосновано получен верный ответ: 1) верно составлена система; 2) найдено правильное решение системы.	10
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка в пункте 2), но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений.	6-7
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-3
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*10*

3	Приведена верная последовательность всех шагов решения.	20
	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.	13-16
	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом может быть верным после исправлений и дополнений.	9-10
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*20*

4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлено уравнение по условию задачи; 2) найдены корни полученного уравнения. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.	20
	При верном решении получен ответ, наряду с правильным постороннее решение.	18
	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены описка или вычислительная ошибка в шаге 2). В результате этой описки или ошибки получен неверный ответ.	15-17
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*20*

5	В представленном решении обосновано получен верный ответ.	15
	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.	12-13
	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом может быть верным после исправлений и дополнений.	9-10
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*15*

6	Обоснованное верное решение. Указаны два способа разложения.	25
	Обоснованно приведен только один верный способ.	20
	Приведен верный ответ, но отсутствует обоснование полученного результата.	15
	Приведен только один верный ответ, но отсутствует обоснование полученного результата.	10
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*25*

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 9 класса
Направление: Математика

Вариант: 1

1	Решите уравнение $$\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0$$
2	Найдите все такие значения x, при которых значение хотя бы одной из данных функций не больше 0: $$f(x)=\frac{x^4-18x^2+81}{x^2+10x+24},\quad g(x)=\lvert x-5\rvert-1$$
3	Решите систему уравнений $$\begin{cases}5x^2+2xy+y^2=4,\\3x^2+3xy+2y^2=2\end{cases}$$
4	Студент снял квартиру с условием, что оплата за каждый следующий месяц уменьшается на одну и ту же величину, по сравнению с предыдущем. Известно, что за первые три месяца он заплатил 471 долларов, за последние три месяца он заплатил 435 долларов. На сколько месяцев он может снять квартиру, если у него всего 1661 долларов?
5	Решите уравнение $$(x+7)(x+1)(x+3)(x+5)=-15$$
6	Найдите все пары *(a;b)*, при которых равносильны неравенства: $$x^2-x(3-a)-3a\le 0\quad \text{и}\quad \lvert x-2\rvert\le b$$

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.

Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение
9 класс, 1 вариант

1	Решение: $$\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0.$$ О.О.У. $x \geq -\frac{1}{11}$ Обе части уравнения $\sqrt{4x+9}=\sqrt{11x+1}+\sqrt{7x+4}$ возведем в квадрат и приведем подобные члены. Получим: $$\sqrt{77x^2+51x+4}=2-7x$$ Для возведения обеих частей уравнения в квадрат потребуем, чтобы $2-7x \geq 0$ или $x \leq \frac{2}{7}$ Получим квадратное уравнение $28x^2+79x=0$, корни которого $x_1=0, x_2=-\frac{79}{28}$ Второй корень не удовлетворяет. **Ответ:** $\{\mathbf{0}\}$
2	Решение: $$f(x)=\frac{x^4-18x^2+81}{x^2+10x+24},\ \ g(x)=\lvert x-5\rvert-1$$ Следует рассмотреть совокупность неравенств: $$\left[\begin{array}{l}\frac{x^4-8x^2+81}{x^2+10x+24}\leq 0,\\ \lvert x-5\rvert-1\leq 0.\end{array}\right. \quad \text{Отсюда} \quad \left[\begin{array}{l}\frac{(x-3)^2(x+3)^2}{(x+6)(x+4)}\leq 0,\\ -1\leq x-5\leq 1.\end{array}\right.$$ Решением первого неравенства является множество $(-6;-4)$ и точки $\{-3;3\}$. Решение второго неравенства – множество $[4,6]$. Тогда решением совокупности неравенств будут множества $(-6;-4)$; $\{-3;3\}$; $[4;6]$. **Ответ:** $(\mathbf{-6;-4})\cup\{\mathbf{-3;3}\}\cup[\mathbf{4;6}]$
3	Решение: $$\begin{cases}5x^2+2xy+y^2=4,\\3x^2+3xy+2y^2=2\end{cases}$$ Второе уравнение умножим на 2. Затем из второго уравнения вычтем первое. Получим: $$\begin{cases}x^2+4xy+3y^2=0,\\5x^2+2xy+y^2=4.\end{cases}$$ Первое уравнение системы можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно неизвестного x. Тогда $x_1=-y$, $x_2=-3y$. Получаем две системы уравнений: $$1)\ \begin{cases}x=-y,\\5x^2+2xy+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 1\\y=\mp 1.\end{cases}$$ $$2)\ \begin{cases}x=-3y,\\5x^2+2xy+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\mp\frac{3\sqrt{10}}{10},\\y=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}.\end{cases}$$ **Ответ:** $\left\{(\mathbf{-1;1});(\mathbf{1;-1});\left(-\frac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{10}};\frac{\mathbf{\sqrt{10}}}{\mathbf{10}}\right);\left(\frac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{10}};-\frac{\mathbf{\sqrt{10}}}{\mathbf{10}}\right)\right\}$

4

Решение: Пусть x_1 – оплата в первый месяц, d – величина, на которую уменьшается оплата каждый месяц. По формуле

$$S_n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2}n$$

суммы n первых членов арифметической прогрессии найдем суммы, которые студент заплатил в первые и последние три месяца

$$S'_3 = \frac{2x_1+(3-1)d}{2}3 = 471,$$

$$S''_3 = \frac{2x_{n-2}+(3-1)d}{2}3 = 435.$$

Отсюда $x_1 + d = 157$, $x_{n-2} + d = 145$

По формуле n-ого члена арифметической прогрессии $x_n = x_1 + (n-1)d$, имеем $x_{n-2} = x_1 + ((n-2)-1)d = x_1 + (n-3)d$.

Всего за n дней было выплачено

$$S_n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2}n = 1661.$$

Следовательно, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + d = 157 \\ x_1 + (n-3)d + d = 145 \\ \dfrac{2x_1 + (n-1)d}{2}n = 1661. \end{cases}$$

Решением этой системы будет $n = 11$.

Ответ: $\boldsymbol{n = 11}$

5

Решение: $(x+7)(x+1)(x+3)(x+5) = -15.$

Перемножим между собой первую со второй и третью с четвертой скобкой. Получим:

$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15) = -15.$$

Пусть $x^2+8x+7 = t$, тогда квадратное уравнение $t(t+8) = -15$ имеет корни $t_1 = -5, t_2 = -3$.

Следовательно, имеем два уравнения

$$x^2+8x+7 = -5 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -2;$$

$$x^2+8x+7 = -3 \quad \Longrightarrow \quad x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\{-6; -2; -4 \pm \sqrt{6}\}}$

6

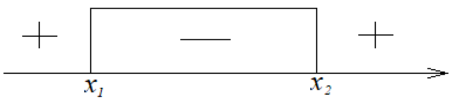
Решение: $x^2 - x(3-a) - 3a \le 0$ и $|x-2| \le b$

Решим каждое неравенство:

1). $x^2 - x(3-a) - 3a \le 0$, $\quad x_{1,2} = \frac{(3-a)\pm\sqrt{9-6a+a^2+12a}}{2}$.

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -a$.

Используя метод интервалов, видим, что решение находится между корнями x_1 и x_2.



Возможны 3 случая расположения на оси корней $x_1 = 3$, $x_2 = -a$:

а) Если $-a < 3$, то $-a \le x \le 3$.

б) Если $-a > 3$, то $3 \le x \le -a$.

в) Если $-a = 3$, то $x = 3$.

2). $|x-2| \le b$, тогда

а) Если $b < 0$, то неравенство решений не имеет.

	б) Если $b\ = 0,$ то $\ x = 2.$ в) Если $b > 0,$ то $2 - b \le x \le 2 + b$.. Данные неравенства равносильны, если совпадают их множества решений, т.е. возможны случаи: I. $[-a; 3] = [2 - b; 2 + b]$ при $-a < 3$ и $b > 0.$ Отсюда $\begin{cases} -a = 2 - b \\ 3 = 2 + b \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$, что удовлетворяет условиям $-a < 3$ и $b > 0.$ II. $[3; -a] = [2 - b; 2 + b]$ при $-a > 3$ и $b > 0.$ Отсюда $\begin{cases} 3 = 2 - b \\ -a = 2 + b \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$, что не удовлетворяет условиям $-a > 3$ и $b > 0.$ **Ответ:** $\boldsymbol{a = -1; b = 1}$

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом
9 класс

Задание	Критерий	Баллы
1	Приведено обоснованное верное решение.	10
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка, но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений или дополнений.	4-6
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-3
	Решение неверное или отсутствует	0
	Максимальный балл	*10*
2	Обосновано получен верный ответ: 1) верно составлена совокупность неравенств; 2) найдено верное решение совокупности.	15
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка при решении одного из неравенств, но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений.	10-13
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*15*
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения.	20
	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.	13-16
	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом может быть верным после исправлений и дополнений.	9-10
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*20*
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлена система уравнений по условию задачи; 2) найдено решение полученной системы уравнений. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.	20
	При верном решении получен ответ, наряду с правильным постороннее решение.	18
	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены описка или вычислительная ошибка в шаге 2). В результате этой описки или ошибки получен неверный ответ.	15-17
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.	8-10
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*20*

5	В представленном решении обосновано получен верный ответ.	10
	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.	8-9
	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом может быть верным после исправлений и дополнений.	6-7
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*10*

6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.	25
	Верно решены оба неравенства. Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован.	20-22
	Приведена только часть верного ответа, но присутствует обоснование полученного результата.	15-16
	Приведена только часть верного ответа, но отсутствует обоснование полученного результата.	10-12
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное.	0
	Максимальный балл	*25*

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 10-11 класса
Направление: Математика

Вариант: 1

1	Решите уравнение $$12\arcsin^2 2x - 16\pi\arcsin 2x + 5\pi^2 = 0$$
2	Решите уравнение $$\lvert x^2 + 2y^2 + 3y - 6\rvert + \lvert y - \lvert 2x + 4 - y\rvert\rvert = 0$$
3	Решите неравенство $$\log_{(x+1)^2}(x+3) < 1$$
4	Решите уравнение $$2 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 3^{2+2\sqrt{x}}$$
5	В некотором городе численность населения за последний год уменьшилась на 4%, а число приезжих увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют приезжие, если год назад их было 8%?
6	Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство $$(m+3)x^3 - (2m+3)x^2 - 6x + m^2 + 6m > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-3; 0]$.

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.

Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение

10-11 класс, 1 вариант

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

Решение: $$12\arcsin^2 2x - 16\pi \arcsin 2x + 5\pi^2 = 0$$

Сделаем подстановку: $t = arc\sin 2x$, где $|t| \le \frac{\pi}{2}$

Тогда получим уравнение $12\,t^2 - 16\pi t + 5\pi^2 = 0$, которое имеет корни:

$t_1 = \frac{5\pi}{6}$ – не удовлетворяет условию $|t| \le \frac{\pi}{2}$; $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Значит, $arc\sin 2x = \frac{\pi}{2}$, откуда $2x = 1$ или $x = 0.5$

Ответ: $\mathbf{0.5}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>

Решение: $$|x^2 + 2y^2 + 3y - 6| + \big|y - |2x + 4 - y|\big| = 0$$

Сумма модулей может быть равна 0, если они оба равны 0, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3y - 6 = 0 \\ |2x + 4 - y| = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3y - 6 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 4 - y = y \\ 2x + 4 - y = -y \end{array}\right. \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Имеем 2 случая:

1) $\begin{cases} x = -2 \\ y \ge 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0{,}5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y \ge 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: $\{(\mathbf{-2};\ \mathbf{0{,}5});\ (\mathbf{-1};\ \mathbf{1})\}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>

Решение: $$\log_{(x+1)^2}(x + 3) < 1$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+1)^2 > 1 \\ x + 3 < (x+1)^2 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < (x+1)^2 < 1 \\ x + 3 > (x+1)^2 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+2) > 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \\ x > -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ne -1 \\ x(x+2) < 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \\ x > -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+2) > 0 \\ (x+2)(x-1) > 0 \\ x > -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ne -1 \\ x(x+2) < 0 \\ (x+2)(x-1) < 0 \\ x > -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы совокупности являются множества: $(-3; -2); (1; +\infty)$.

Вторая система совокупности имеет решение: $(-2; -1); (-1; 0)$.

Итак, неравенство имеет решение: $(-3; -2); (-2; -1); (-1; 0); (1; +\infty)$.

Ответ: $(\mathbf{-3}; \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{-2}; \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{-1}; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{1}; +\infty)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>

Решение: $2 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 3^{2+2\sqrt{x}}$.

О.О.У. $x \ge 0$.

Перепишем данное уравнение в виде:

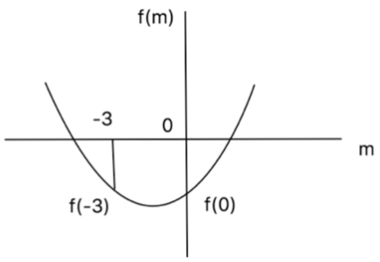
$$2 \cdot 3^{2x} - 17 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^x - 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $3^{2\sqrt{x}}$:

$$2 \cdot 3^{2(x-\sqrt{x})} - 17 \cdot 3^{x-\sqrt{x}} - 9 = 0.$$

Сделаем подстановку $3^{x-\sqrt{x}} = t,\ \ t > 0$. Получим квадратное уравнение $2t^2 - 17t - 9 = 0$, корни которого $t_1 = 9,\ t_2 = -0.5$ – не удовлетворяет условию

</td>
</tr>
</table>

		$t > 0$ Значит, $3^{x-\sqrt{x}} = 9$, откуда $x - \sqrt{x} = 2$. Сделаем подстановку $\sqrt{x} = z,\ z \geq 0$. Тогда имеем уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = -1$ (не подходит), $z_2 = 2$. Итак, $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$
	Ответ:	$\{\mathbf{4}\}$
5	Решение:	Обозначим за x численность населения в городе год назад, тогда приезжих было $0.08x$. Через год численность населения в городе стала равна $x - 0.04x = 0.96x$, а приезжих стало $0.08x - 0.05 \cdot 0.08x = 1.05 \cdot 0.08x$ Теперь найдем сколько процентов составляют приезжие от общего числа жителей города: $$\frac{1.05 \cdot 0.08x}{0.96x} \cdot 100\% = 8.75\%$$
	Ответ:	$\mathbf{8.75}\%$
6	Решение:	$$(m+3)x^3 - (2m+3)x^2 - 6x + m^2 + 6m > 0.$$ Перепишем данное неравенство в виде: $$m^2 + m(x^3 - 2x^2 + 6) + 3x^3 - 3x^2 - 6x > 0.$$ По условию это неравенство должно выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-3; 0]$. Решим противоположную задачу: неравенство $$m^2 + m(x^3 - 2x^2 + 6) + 3x^3 - 3x^2 - 6x \leq 0$$ выполняется при всех значениях m из отрезка $[-3; 0]$. Рассмотрим функцию $f(m) = m^2 + m(x^3 - 2x^2 + 6) + 3x^3 - 3x^2 - 6x$, которая должна быть неотрицательной для всех m из отрезка $[-3; 0]$. Это будет выполнено, если  $$\begin{cases} f(-3) \leq 0 \\ f(0) \leq 0. \end{cases}$$ Подставляем $m = -3$ и $m = 0$ в $f(m)$ и решаем полученную систему неравенств. $$\begin{cases} 3(x+1)(x-3) \leq 0 \\ 3x(x+1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1\} \cup [0; 2].$$ Следовательно, данное неравенство выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-3; 0]$, если $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.
	Ответ:	$(-\infty; \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{-1}; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}; +\infty)$

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 10-11 класса
Направление: Математика

Вариант: 2

1	Решите уравнение $$36\arcsin^2 2x + 24\pi \arcsin 2x - 5\pi^2 = 0$$
2	Решите уравнение $$\left|x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25\right| + \left|3 + y - \left|2x + 5 - y\right|\right| = 0$$
3	Решите неравенство $$\log_{\|x-1\|}(6x + 21) < 2$$
4	Решите уравнение $$4^{\sqrt{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 8 \cdot 4^{\sqrt[4]{x}}$$
5	В некотором институте численность студентов за последний год увеличилась на 8%, а число иногородних студентов уменьшилось на 19%. Сколько процентов от общего числа студентов составляют иногородние студенты, если год назад их было 4%?
6	Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство $$2(m+1)x^3 + (9-4m)x^2 - 3x + m^2 - m - 12 > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-1; 4]$.

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.

Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение

10-11 класс, 2 вариант

<table>
<tr><td>1</td><td>

Решение: $$36\arcsin^2 2x + 24\pi \arcsin 2x - 5\pi^2 = 0.$$

Сделаем подстановку $t = arcsin2x$, где $|t| \le \frac{\pi}{2}$. Получаем уравнение $36t^2 + 24\pi\, t - 5\pi^2 = 0$, корни которого $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = -\frac{5\pi}{2}$.

Второй корень не удовлетворяет условию $|t| \le \frac{\pi}{2}$. Значит $arcsin2x = \frac{\pi}{6}$, откуда $2x = \frac{1}{2}$ или $x = 0{,}25$.

Ответ: $\{\mathbf{0,25}\}$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Решение: $$|x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25| + \big|3 + y - |2x + 5 - y|\big| = 0.$$

Сумма двух модулей может равняться нулю, если они оба равны нулю, т.е.

$\begin{cases} x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25 = 0, \\ |2x + 5 - y| = y + 3, \end{cases}$ $\Rightarrow$ раскрывая модуль, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 5 - y = y + 3, \\ 2x + 5 - y = -y - 3, \end{array}\right. \\ y + 3 \ge 0. \end{cases}$$

Имеем два случая:

1). $\begin{cases} x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25 = 0, \\ y = x + 1, \\ y \ge -3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$

2). $\begin{cases} x^2 + 4x + 2y^2 + 15y + 25 = 0, \\ x = -4, \\ y \ge -3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -4, \\ y = -2{,}5. \end{cases}$

Ответ: $\{(\mathbf{-4};\ \mathbf{-2,5});\ (\mathbf{-3};\ \mathbf{-2})\}$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

Решение: $$\log_{|x-1|}(6x + 21) < 2$$

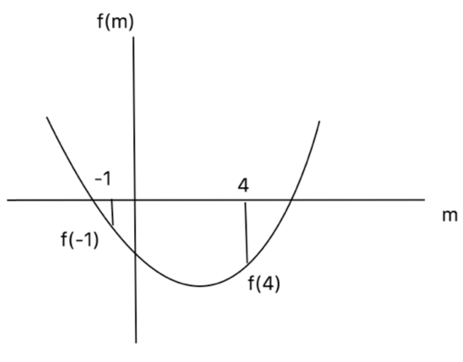
Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x - 1| < 1, \\ 6x + 21 > (x - 1)^2, \\ 6x + 21 > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} |x - 1| > 1, \\ 6x + 21 < (x - 1)^2, \\ 6x + 21 > 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ne 1, \\ 0 < x < 2 \\ (x - 10)(x + 1) < 0, \\ x > -3{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ (x - 10)(x + 1) > 0, \\ x > -3{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы совокупности является множество $(0;\ 1) \cup (1; 2)$. Вторая система совокупности имеет решение $(-3{,}5;\ -2) \cup (10;\ +\infty)$. Решением данного неравенства будет объединение полученных множеств.

Ответ: $(\mathbf{-3,5};\ \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{0};\ \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}; \mathbf{2}) \cup (\mathbf{10};\ +\infty)$

</td></tr>
</table>

4	Решение:	$$4^{\sqrt{x}} = 2\cdot 2^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 8\cdot 4^{\sqrt[4]{x}}.$$ О.О.У. $x \geq 0$. Перепишем уравнение в виде $2^{2\sqrt{x}} - 2\cdot 2^{\sqrt{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{x}} - 8\cdot 2^{2\sqrt[4]{x}} = 0$. Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $2^{2\sqrt[4]{x}}$: $$2^{2(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})} - 2\cdot 2^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} - 8 = 0.$$ Сделаем подстановку $2^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = t$, $t > 0$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 2t - 8 = 0$, корни которого $t_1 = 4$, $t_2 = -2$. Второй корень не удовлетворяет условию $t > 0$. Значит, $2^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = 4$, откуда $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$. Сделаем подстановку $\sqrt[4]{x} = z$, $z \geq 0$. Тогда имеем уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ (не подходит). Итак, $\sqrt[4]{x} = 2$, откуда $x = 16$
	Ответ:	$\{\mathbf{16}\}$
5	Решение:	Обозначим через x численность студентов в институте год назад. Тогда иногородних студентов было $0{,}04x$. Через год численность студентов в институте стала равна $x + 0{,}08x = 1{,}08x$, а иногородних студентов стало $0{,}04x - 0{,}19\cdot 0{,}04x = 0{,}81\cdot 0{,}04x$. Теперь найдем сколько процентов составляют иногородние студенты от общего числа. $$\frac{0{,}81\cdot 0{,}04x}{1{,}08x}\cdot 100\% = 3\%$$
	Ответ:	**3**%
6	Решение:	$$2(m+1)x^3 + (9-4m)x^2 - 3x + m^2 - m - 12 > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-1; 4]$. Перепишем данное неравенство в виде $$m^2 + m(2x^3 - 4x^2 - 1) + 2x^3 + 9x^2 - 3x - 12 > 0.$$ По условию это неравенство должно выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-1; 4]$. Решим противоположную задачу: неравенство $m^2 + m(2x^3 - 4x^2 - 1) + 2x^3 + 9x^2 - 3x - 12 \leq 0$ должно выполняться при всех значениях m из отрезка $[-1; 4]$. Рассмотрим функцию $f(m) = m^2 + m(2x^3 - 4x^2 - 1) + 2x^3 + 9x^2 - 3x - 12$, которая должна принимать неотрицательные значения для всех m из отрезка $[-1; 4]$. Это будет выполнено, если  $$\begin{cases} f(-1) \leq 0, \\ f(4) \leq 0. \end{cases}$$ Подставляем $m = -1$ и $m = 4$ в $f(m)$ и решаем полученную систему неравенств: $$\begin{cases} 13\left(x + \frac{10}{13}\right)(x-1) \leq 0, \\ x\left(x + \frac{3}{10}\right)(x-1) \leq 0. \end{cases}$$ Отсюда множество решений системы неравенств $\left[-\frac{10}{13}; -\frac{3}{10}\right] \cup [0; 1]$.

		При этих значениях x неравенство $$m^2+m(2x^3-4x^2-1)+2x^3+9x^2-3x-12\leq 0$$ выполняется при всех значениях m из отрезка $[-1;4]$. Следовательно, данное неравенство $$m^2+m(2x^3-4x^2-1)+2x^3+9x^2-3x-12>0$$ будет выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-1;4]$, если $x\in\left(-\infty;\ -\frac{10}{13}\right)\cup\left(-\frac{3}{10};0\right)\cup(1;+\infty)$.
	Ответ:	$$\left(-\infty;\ -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{13}}\right)\cup\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}};\mathbf{0}\right)\cup(\mathbf{1};+\infty).$$

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 10-11 класса
Направление: Математика

Вариант: 3

1	Решите уравнение $$9\arccos^2 x - 3\pi \arccos x - 2\pi^2 = 0$$
2	Решите уравнение $$\lvert x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5\rvert + \lvert y - \lvert 2x + 6 - y\rvert\rvert = 0$$
3	Решите неравенство $$\log_{(x+2)^2}(x+4) < 1$$
4	Решите уравнение $$9^x - 7 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 2 \cdot 9^{1+\sqrt{x}}$$
5	На некоторой базе количество муки за последний год увеличилось на 5%, а количество муки первого сорта увеличилось на 26%. Сколько процентов от общего количества муки составляет мука первого сорта, если год назад ее было 9%?
6	Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство $$(2m-2)x^3 + (3-2m)x^2 - 4x + m^2 - m - 12 > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[1; 4]$.

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

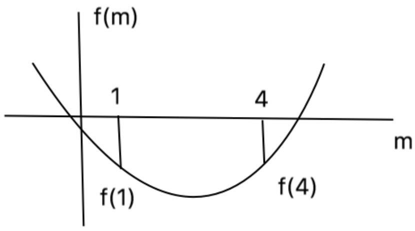
В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.

Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение
10-11 класс, 3 вариант

1	Решение: **Ответ:**	$9\arccos^2 x - 3\pi \arccos x - 2\pi^2 = 0.$ Сделаем подстановку $t = \arccos x$, где $0 \le t \le \pi$. Получаем уравнение $9t^2 + 3\pi\, t - 2\pi^2 = 0$, корни которого $t_1 = \frac{2\pi}{3}$, $t_2 = -\frac{\pi}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию $0 \le t \le \pi$. Значит $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$, откуда $x = -\frac{1}{2}$ или $x = -0{,}5$ $\{\mathbf{-0,5}\}$
2	Решение: **Ответ:**	$\lvert x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5\rvert + \lvert y - \lvert 2x + 6 - y\rvert\rvert = 0.$ Сумма двух модулей может равняться нулю, если они оба равны нулю, т.е. $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ \lvert 2x + 6 - y\rvert = y, \end{cases}$ откуда, раскрывая модуль, получим систему $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 6 - y = y, \\ 2x + 6 - y = -y, \end{array}\right. \\ y \ge 0. \end{cases}$ Имеем два случая: 1). $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ y = x + 3, \\ y \ge 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ x = -3, \\ y \ge 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -3, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$ $\{(\mathbf{-2};\ \mathbf{1});\ (\mathbf{-3}; \mathbf{0,5})\}$
3	Решение: **Ответ:**	$\log_{(x+2)^2}(x+4) < 1$ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < (x+2)^2 < 1, \\ x + 4 > (x+2)^2, \\ x + 4 > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)^2 > 1, \\ x + 4 < (x+2)^2, \\ x + 4 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ne -2, \\ (x+1)(x+3) < 0 \\ x(x+3) < 0, \\ x > -4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x+3) > 0 \\ x(x+3) > 0, \\ x > -4. \end{cases} \end{array}\right.$ Решением первой системы совокупности является множество $(-3;\ -2) \cup (-2; -1)$. Вторая система совокупности имеет решение $(-4;\ -3) \cup (0;\ +\infty)$. Решением данного неравенства будет объединение полученных множеств. $(-4;\ -3) \cup (-3;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$
4	Решение:	$9^x - 7 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 2 \cdot 9^{1+\sqrt{x}}.$ О.О.У. $x \ge 0$. Перепишем уравнение в виде $3^{2x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^x - 2 \cdot 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} = 0$. Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $3^{2\sqrt{x}}$: $3^{2(x-\sqrt{x})} - 7 \cdot 3^{x-\sqrt{x}} - 18 = 0.$ Сделаем подстановку $3^{x-\sqrt{x}} = t,\ t > 0$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 7\,t - 18 = 0$, корни которого $t_1 = 9$, $t_2 = -2$. Второй корень не

		удовлетворяет условию $t > 0$. Значит, $3^{x-\sqrt{x}} = 9$, откуда $x - \sqrt{x} = 2$. Сделаем подстановку $\sqrt{x} = z$, $z \geq 0$. Тогда имеем уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ (не подходит). Итак, $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$
	Ответ:	$\{\mathbf{4}\}$
5	Решение:	Обозначим через x количество муки на базе год назад. Тогда количество муки первого сорта было $0{,}09x$. Через год количество муки на базе стало равно $x + 0{,}05x = 1{,}05x$, а количество муки первого сорта стало $0{,}09x + 0{,}26 \cdot 0{,}09x = 0{,}09 \cdot 1{,}26x$. Теперь найдем сколько процентов составляют мука первого сорта от общего количества муки. $$\frac{0{,}09 \cdot 1{,}26x}{1{,}05x} \cdot 100\% = 10{,}8\%$$
	Ответ:	$\mathbf{10{,}8}\%$
6	Решение:	$$(2m-2)x^3 + (3-2m)x^2 - 4x + m^2 - m - 12 > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[1; 4]$. Перепишем данное неравенство в виде $$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 - 1) - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0.$$ По условию это неравенство должно выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[1; 4]$. Решим противоположную задачу: неравенство $m^2 + m(2x^3 - 2x^2 - 1) - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$ должно выполняться при всех значениях m из отрезка $[1; 4]$. Рассмотрим функцию $f(m) = m^2 + m(2x^3 - 2x^2 - 1) - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ которая должна принимать неотрицательные значения для всех m из отрезка $[1; 4]$. Это будет выполнено, если $$\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(4) \leq 0. \end{cases}$$  Подставляем $m = 1$ и $m = 4$ в $f(m)$ и решаем полученную систему неравенств: $$\begin{cases} (x-6)(x+2) \leq 0, \\ 6x\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 0{,}5) \leq 0. \end{cases}$$ Отсюда множество решений системы неравенств $[-2; -0{,}5] \cup \left[0; \frac{4}{3}\right]$. При этих значениях x неравенство $$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 - 1) - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$$ выполняется при всех значениях m из отрезка $[1; 4]$. Следовательно, данное неравенство $$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 - 1) - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0$$ будет выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[1; 4]$, если $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-0{,}5; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$
	Ответ:	$(-\infty;\ \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{-0{,}5}; \mathbf{0}) \cup \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; +\infty\right)$

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 10-11 класса
Направление: Математика

Вариант: 4

1	Решите уравнение $$6\arccos^2 x-\pi\arccos x-2\pi^2=0$$
2	Решите уравнение $$\left|x^2+2x+2y^2+15y+22\right|+\left|3+y-\left|2x+3-y\right|\right|=0$$
3	Решите неравенство $$\log_{\lvert x\rvert}(6x+27)<2$$
4	Решите уравнение $$2^{2\sqrt{x}+1}=7\cdot 2^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+4^{1+\sqrt[4]{x}}$$
5	В некоторой библиотеке количество книг за последний год увеличилось на 5%, а количество художественных книг уменьшилось на 1%. Сколько процентов от общего числа книг составляют художественные книги, если год назад их было 7% ?
6	Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство $$(2m+8)x^3-(2m+7)x^2-4x+m^2+9m+8>0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-4;-1]$.

Указания:
Задача считается решенной, если получены все ее решения.
В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.
Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, e.
Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово НЕТ.

Решение
10-11 класс, 4 вариант

<table>
<tr><td>1</td><td>

Решение: $$6\arccos^2 x - \pi \arccos x - 2\pi^2 = 0.$$

Сделаем подстановку $t = \arccos x$, где $0 \le t \le \pi$. Получаем уравнение $6t^2 - \pi t - 2\pi^2 = 0$, корни которого $t_1 = \frac{2\pi}{3}$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$. Второй корень не удовлетворяет условию $0 \le t \le \pi$. Значит $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$, откуда $x = -\frac{1}{2}$ или $x = -0{,}5$.

Ответ: $\{\mathbf{-0,5}\}$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Решение: $$|x^2 + 2x + 2y^2 + 15y + 22| + \big|3 + y - |2x + 3 - y|\big| = 0.$$

Сумма двух модулей может равняться нулю, если они оба равны нулю, т.е.

$\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 15y + 22 = 0, \\ |2x + 3 - y| = y + 3 \end{cases}$ откуда, раскрывая модуль, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 15y + 22 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 3 - y = y + 3, \\ 2x + 3 - y = -y - 3, \end{array}\right. \\ y \ge -3. \end{cases}$$

Имеем два случая:

1). $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 15y + 22 = 0, \\ y = x, \\ y \ge -3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -2, \\ y = -2. \end{cases}$

2). $\begin{cases} x^2 + 2x + 2y^2 + 15y + 22 = 0, \\ x = -3, \\ y \ge -3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2{,}5. \end{cases}$

Ответ: $\{(\mathbf{-2};\ \mathbf{-2});\ (\mathbf{-3}; \mathbf{-2,5})\}$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

Решение: $$\log_{|x|}(6x + 27) < 2$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ 6x + 27 > x^2, \\ 6x + 27 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} |x| > 1, \\ 6x + 27 < x^2, \\ 6x + 27 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ne 0, \\ -1 < x < 1, \\ (x - 9)(x + 3) < 0, \\ x > -4{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1 \end{array}\right. \\ (x - 9)(x + 3) > 0, \\ x > -4{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$

Решением первой системы совокупности является множество $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$. Вторая система совокупности имеет решение $(-4{,}5;\ -3) \cup (9;\ +\infty)$. Решением данного неравенства будет объединение полученных множеств.

Ответ: $(\mathbf{-4,5};\ \mathbf{-3}) \cup (\mathbf{-1};\ \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{9};\ +\infty)$

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

Решение: $$2^{2\sqrt{x}+1} = 7 \cdot 2^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 4^{1+\sqrt[4]{x}}.$$

О.О.У. $x \ge 0$.

Перепишем уравнение в виде $2 \cdot 2^{2\sqrt{x}} - 7 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}} - 4 \cdot 2^{2\sqrt[4]{x}} = 0$. Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $2^{2\sqrt[4]{x}}$:

$$2 \cdot 2^{2(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})} - 7 \cdot 2^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} - 4 = 0.$$

Сделаем подстановку $2^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = t,\ t > 0$. Получим квадратное уравнение

</td></tr>
</table>

$2t^2 - 7t - 4 = 0$, корни которого $t_1 = 4$, $t_2 = -0{,}5$. Второй корень не удовлетворяет условию $t > 0$.

Значит, $2^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = 4$, откуда $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$. Сделаем подстановку $\sqrt[4]{x} = z,\ z \geq 0$. Тогда имеем уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ (не подходит). Итак, $\sqrt[4]{x} = 2$, откуда $x = 16$.

Ответ: $\{\mathbf{16}\}$

5

Решение: Обозначим через x количество книг в библиотеке год назад. Тогда количество художественных книг было $0{,}07x$. Через год количество количество книг в библиотеке стало равно $x + 0{,}05x = 1{,}05x$, а количество художественных книг стало $0{,}07x - 0{,}01 \cdot 0{,}07x = 0{,}07 \cdot 0{,}99x$. Теперь найдем сколько процентов составляют мука первого сорта от общего количества муки.

$$\frac{0{,}07 \cdot 0{,}99x}{1{,}05x} \cdot 100\% = 6{,}6\%$$

Ответ: $\mathbf{6{,}6\%}$

6

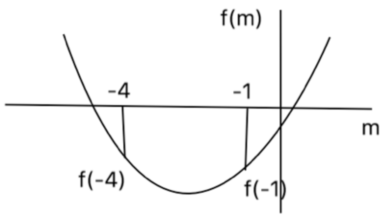
Решение:
$$(2m+8)x^3 - (2m+7)x^2 - 4x + m^2 + 9m + 8 > 0$$
выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-4; -1]$.

Перепишем данное неравенство в виде
$$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 + 9) + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 8 > 0.$$
По условию это неравенство должно выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-4; -1]$.

Решим противоположную задачу:

неравенство $m^2 + m(2x^3 - 2x^2 + 9) + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 8 \leq 0$ должно выполняться при всех значениях m из отрезка $[-4; -1]$.

Рассмотрим функцию $f(m) = m^2 + m(2x^3 - 2x^2 + 9) + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 8$ которая должна принимать неотрицательные значения для всех m из отрезка $[-4; -1]$. Это будет выполнено, если



$$\begin{cases} f(-4) \leq 0, \\ f(-1) \leq 0. \end{cases}$$
Подставляем $m = -4$ и $m = -1$ в $f(m)$ и решаем полученную систему неравенств:
$$\begin{cases} (x-6)(x+2) \leq 0, \\ 6x\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 0{,}5) \leq 0. \end{cases}$$
Отсюда множество решений системы неравенств $[-2; -0{,}5] \cup \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

При этих значениях x неравенство
$$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 + 9) + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 8 \leq 0$$
выполняется при всех значениях m из отрезка $[-4; -1]$.

Следовательно, данное неравенство
$$m^2 + m(2x^3 - 2x^2 + 9) + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 8 > 0$$
будет выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-4; -1]$, если $x \in (-\infty; -2) \cup (-0{,}5; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{-0{,}5}; \mathbf{0}) \cup \left(\mathbf{\frac{4}{3}}; +\infty\right)$

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
Оборонно-техническая олимпиада (II этап)
для 10-11 класса
Направление: Математика

Вариант: 5

1	Решите уравнение $$36\arcsin^2 2x + 36\pi\arcsin 2x + 5\pi^2 = 0$$
2	Решите уравнение $$\lvert x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5\rvert + \big\lvert y - \lvert 2x + 2 - y\rvert \big\rvert = 0$$
3	Решите неравенство $$\log_{x^2}(x+2) < 1$$
4	Решите уравнение $$9^x - 2\cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 7\cdot 3^{2+2\sqrt{x}}$$
5	На круизном лайнере численность пассажиров за последний год уменьшилась на 8%, а число детей уменьшилось на 15%. Сколько процентов от общего числа пассажиров составляют дети, если год назад их было 23%?
6	Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство $$(m+5)x^3 - (m+2)x^2 - 7x + m^2 + 9m > 0$$ выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-5; 0]$.

Указания:

Задача считается решенной, если получены все ее решения.

В ответе числа записывать в виде обыкновенной дроби или в виде конечной десятичной дроби.

Не использовать приближенные значения десятичных дробей, иррациональных чисел и чисел π, е.

Если требуемый ответ или решение отсутствует – писать в ответе слово «НЕТ».

Решение
10-11 класс, 5 вариант

1	Решение:	$36\arcsin^2 2x + 36\pi\arcsin 2x + 5\pi^2 = 0.$ Сделаем подстановку $t = arcsin2x$, где $\lvert t\rvert \le \frac{\pi}{2}$. Получаем уравнение $36t^2 + 36\pi\, t + 5\pi^2 = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{\pi}{6}$, $t_2 = -\frac{5\pi}{2}$. Второй корень не удовлетворяет условию $\lvert t\rvert \le \frac{\pi}{2}$. Значит $arcsin2x = -\frac{\pi}{6}$, откуда $2x = -\frac{1}{2}$ или $x = -0{,}25$.
	Ответ:	$\{\mathbf{-0,25}\}$
2	Решение:	$\lvert x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5\rvert + \big\lvert y - \lvert 2x + 2 - y\rvert\big\rvert = 0.$ Сумма двух модулей может равняться нулю, если они оба равны нулю, т.е. $\begin{cases} x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ \lvert 2x + 2 - y\rvert = y, \end{cases}$ откуда, раскрывая модуль, получим систему $\begin{cases} x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 2 - y = y, \\ 2x + 2 - y = -y, \end{array}\right. \\ y \ge 0. \end{cases}$ Имеем два случая: 1). $\begin{cases} x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ y = x + 1, \\ y \ge 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x^2 - 2x + 2y^2 + 3y - 5 = 0, \\ x = -1, \\ y \ge 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$
	Ответ:	$\{(\mathbf{0};\ \mathbf{1});\ (\mathbf{-1}; \mathbf{0,5})\}$
3	Решение:	$\log_{x^2}(x + 2) < 1.$ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x + 2 > x^2, \\ x + 2 > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1, \\ x + 2 < x^2, \\ x + 2 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ne 0, \\ -1 < x < 1, \\ (x - 2)(x + 1) < 0, \\ x > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ (x - 2)(x + 1) > 0, \\ x > -2. \end{cases} \end{array}\right.$ Решением первой системы совокупности является множество $(-1;\ 0) \cup (0; 1)$. Вторая система совокупности имеет решение $(-2;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$. Решением данного неравенства будет объединение полученных множеств.
	Ответ:	$(\mathbf{-2};\ \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{-1};\ \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2};\ +\infty)$
4	Решение:	$9^x - 2 \cdot 3^{\sqrt{x} + x} = 7 \cdot 3^{2 + 2\sqrt{x}}.$ О.О.У. $x \ge 0.$ Перепишем уравнение в виде $3^{2x} - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^x - 7 \cdot 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} = 0.$ Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части уравнения на $3^{2\sqrt{x}}$: $3^{2(x - \sqrt{x})} - 2 \cdot 3^{x - \sqrt{x}} - 63 = 0.$ Сделаем подстановку $3^{x - \sqrt{x}} = t,\ t > 0$. Получим квадратное уравнение

$t^2 - 2t - 63 = 0$, корни которого $t_1 = 9$, $t_2 = -7$. Второй корень не удовлетворяет условию $t > 0$.

Значит, $3^{x-\sqrt{x}} = 9$, откуда $x - \sqrt{x} = 2$. Сделаем подстановку $\sqrt{x} = z$, $z \geq 0$. Тогда имеем уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ (не подходит). Итак, $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$.

Ответ: $\{\mathbf{4}\}$

5

Решение: Обозначим через x численность пассажиров на круизном лайнере год назад. Тогда число детей было $0{,}23x$. Через год численность пассажиров на лайнере стала равна $x - 0{,}08x = 0{,}92x$, а детей стало $0{,}23x - 0{,}15 \cdot 0{,}23x = 0{,}85 \cdot 0{,}23x$. Теперь найдем сколько процентов составляют дети от общего числа.

$$\frac{0{,}85 \cdot 0{,}23x}{0{,}92x} \cdot 100\% = 21{,}25\%$$

Ответ: $\mathbf{21{,}25}\%$

6

Решение:

$$(m+5)x^3 - (m+2)x^2 - 7x + m^2 + 9m > 0$$

выполняется хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-5; 0]$.

Перепишем данное неравенство в виде

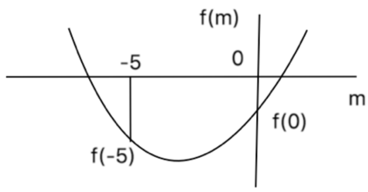
$$m^2 + m(x^3 - x^2 + 9) + 5x^3 - 2x^2 - 7x > 0.$$

По условию это неравенство должно выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-5; 0]$.

Решим противоположную задачу:

неравенство $m^2 + m(x^3 - x^2 + 9) + 5x^3 - 2x^2 - 7x \leq 0$ должно выполняться при всех значениях m из отрезка $[-5; 0]$.

Рассмотрим функцию $f(m) = m^2 + m(x^3 - x^2 + 9) + 5x^3 - 2x^2 - 7x$, которая должна принимать неотрицательные значения для всех m из отрезка $[-5; 0]$. Это будет выполнено, если



$$\begin{cases} f(-5) \leq 0, \\ f(0) \leq 0. \end{cases}$$

Подставляем $m = -5$ и $m = 0$ в $f(m)$ и решаем полученную систему неравенств:

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 4) \leq 0, \\ 5x\left(x - \frac{7}{5}\right)(x + 1) \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда множество решений системы неравенств $\left[-\frac{5}{3}; -1\right] \cup \left[0; \frac{7}{5}\right]$.

При этих значениях x неравенство

$$m^2 + m(x^3 - x^2 + 9) + 5x^3 - 2x^2 - 7x \leq 0$$

выполняется при всех значениях m из отрезка $[-5; 0]$.

Следовательно, данное неравенство

$$m^2 + m(x^3 - x^2 + 9) + 5x^3 - 2x^2 - 7x > 0$$

будет выполняться хотя бы при одном значении m, принадлежащем отрезку $[-5; 0]$, если $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (-1;\ 0) \cup \left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\mathbf{\frac{5}{3}}\right) \cup (-\mathbf{1};\ \mathbf{0}) \cup \left(\mathbf{\frac{7}{5}}; +\infty\right)$

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом
10-11 класс

Задание	Критерий	Баллы
1	Приведено обоснованное верное решение.	10
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка, но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений или дополнений.	4-6
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-3
	Решение неверное или отсутствует	0
	Максимальный балл	*10*

2	Обосновано получен верный ответ: 1) верно составлена система; 2) верно раскрыт модуль; 3) найдено правильное решение системы.	20
	Приведена верная последовательность решения. Допущены описка или вычислительная ошибка при решении одного из уравнений, но в целом верно и может стать полностью правильным решением после небольших исправлений.	16-18
	При верном решении получен ответ, наряду с правильным постороннее решение.	14-15
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-7
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*20*

3	Приведена верная последовательность всех шагов решения.	15
	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.	13-14
	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом может быть верным после исправлений и дополнений.	10-12
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-5
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*15*

4	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Все преобразования и вычисления выполнены верно.	20
	Получен верный ответ.	17-18
	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены описка или вычислительная ошибка. В результате этой описки или ошибки получен неверный ответ.	14-16
	При верном решении получен ответ, наряду с правильным постороннее решение.	1-7
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	0
	Максимальный балл	*20*

5	В представленном решении обосновано получен верный ответ.	10
	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и приведшая к неверному ответу.	8-9
	Приведены некоторые утверждения, помогающие в решении задачи.	6-7
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-3
	Решение неверное или отсутствует.	0
	Максимальный балл	*10*

6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.	25
	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован.	20-22
	Приведена только часть верного ответа, но присутствует обоснование полученного результата.	15-16
	Приведена только часть верного ответа, но отсутствует обоснование полученного результата.	10-12
	Рассмотрены отдельные важные моменты при ошибочном решении или при отсутствии решения.	1-7
	Решение неверное.	0
	Максимальный балл	*25*